ISBN:1858-1382
J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol 7, No 1, 49-55, Juli 2010

Solusi Numerik Persamaan Diferensial Biasa Dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima

Jeffry Kusuma* dan Abdillah**

Abstrak

Tulisan ini menurunkan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima dengan mengacu pada persamaan diferensial biasa yang berbentuk $y' = f(x,y)$ dengan syarat awal $y(x_0) = y_0$. Penurunan dilakukan dengan menghampiri fungsi $f(x, y(x))$ ke dalam polinom interpolasi beda mundur Newton derajat empat.

Keywords: *interpolasi polinom, metode Adams-Bashforth-Moulton, metode Runge-Kutta.*

1. Pendahuluan

Persamaan Differensial adalah persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tak diketahui. Persamaan diferensial berperanan penting di alam, sebab kebanyakan fenomena alam dirumuskan dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial sering digunakan sebagai model matematika dalam bidang sains maupun dalam bidang rekayasa.

Ada banyak teknik untuk memperoleh solusi persamaan diferensial, suatu fungsi dasar ataupun fungsi khusus, seperti fungsi Legendre, fungsi Bessel dan fungsi Gauss. Kita tidak ingin mengurangi pentingnya bidang dasar matematika ini, tetapi bagaimanapun juga kita menyadari bahwa seringkali tidak semua persoalan praktis dapat diselesaikan metoda klasik, ataupun memberikan solusi yang begitu sulit diperoleh untuk dievaluasi, misalnya persamaan $y' = x^2 + y^2$ tidak mempunyai solusi dasar. Dalam banyak kasus praktis, beberapa koefisien atau persamaan diferensial adalah nonlinier atau hanya diberikan sebagai susunan tabel data percobaan, hal yang terakhir ini tidak dapat diselesaikan secara analitik.

Jelas bahwa kita harus memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi analitiknya yang dinamakan dengan solusi numerik. Sampai sejauh ini kita telah mengenal beberapa metode numerik seperti metode Euler, metode Deret Taylor, dan metode Runge Kutta. Semua metode tersebut dikelompokkan ke dalam metode satu langkah, sebab untuk menaksir nilai $y(x_{n+1})$ dibutuhkan satu buah taksiran nilai sebelumnya, $y(x_n)$.

Kelompok metode penyelesaian persamaan diferensial biasa yang lain ialah metode banyak langkah. Pada metode banyak-langkah, perkiraan nilai $y(x_{n+1})$ membutuhkan beberapa taksiran nilai sebelumnya, $y(x_n)$, $y(x_{n-1})$, ... Yang termasuk ke dalam metode banyak-langkah adalah metode prediktor-korektor. Ada beberapa metode

---

* *Staf Pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*
** *Mahasiswa pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

prediktor-korektor yang termasuk ke dalam metode banyak-langkah salah satunya adalah metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Disini penulis mencoba menurunkan metode Adams-Bashforth-Moulton yang mempunyai orde yang lebih tinggi dari orde empat untuk mendapatkan solusi yang mempunyai ketelitian yang lebih baik. Tulisan ini hanya memusatkan perhatian pada penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa yang berbentuk $y' = f(x, y)$ dengan kondisi awal $y(x_0) = y_0$.

2. Pembahasan

Tinjau persamaan diferensial biasa orde satu $y' = f(x, y)$. Bila kedua ruas diintegrasikan dari x_n sampai $x_{n+1} = x_n + h$ diperoleh,

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx \tag{1}$$

Secara umum rumus prediktor berorde tinggi dapat diperoleh dengan menggunakan polinom yang menginterpolasi pada simpul-simpul $x_{n-m}, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ untuk bilangan bulat $m > 0$. Dengan memilih $m = 4$ maka persamaan prediktor diperoleh dengan mengaproksimasi fungsi $f(x, y(x))$ dengan menggunakan polinom derajat empat $p_4(x)$ yang menginterpolasi pada simpul-simpul yang berjarak sama yaitu, $x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$. Disini interpolasi polinom yang digunakan adalah interpolasi beda mundur Newton yang dalam hal ini

$$\begin{aligned}
x_{n-1} &= x_n - h \\
x_{n-2} &= x_{n-1} - h = x_n - 2h \\
x_{n-3} &= x_{n-2} \quad h = x_n - 3h \\
x_{n-4} &= x_{n-3} - h = x_n - 4h
\end{aligned}$$

Untuk memudahkan perhitungan koefisien-koefisien $a_1[x_{n-1}, x_n]$, $a_2[x_{n-2}, x_n]$, $a_3[x_{n-3}, x_n]$ dan $a_4[x_{n-4}, x_n]$ digunakan tabel beda terbagi Newton, sehingga diperoleh

$$a_1[x_{n-1}, x_n] = \frac{\nabla f_n}{h}, \tag{2}$$

$$a_2[x_{n-2}, x_n] = \frac{\nabla^2 f_n}{2h^2}, \tag{3}$$

$$a_3[x_{n-3}, x_n] = \frac{\nabla^3 f_n}{6h^3}, \tag{4}$$

$$a_4[x_{n-4}, x_n] = \frac{\nabla^4 f_n}{24h^4}. \tag{5}$$

Interpolasi polinom orde-*n*, dinyatakan dengan :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})a_n[x_0, x_n], \tag{6}$$

atau interpolasi ini biasa juga disebut interpolasi beda terbagi Newton. Sehingga interpolasi polinom derajat empat dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & f_n + (x - x_n)a_1[x_{n-1}, x_n] + a_2[x_{n-2}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ & + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})a_3[x_{n-3}, x_n] \\ & + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})a_4[x_{n-4}, x_n] \end{aligned} \tag{7}$$

Dengan mensubsitusi persamaan (2) sampai persamaan (5) ke persamaan (7) diperoleh :

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & f_n + \frac{\nabla f_n}{h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})\frac{\nabla^3 f_n}{3!h^3} \\ & + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})\frac{\nabla^4 f_n}{4!h^4} \end{aligned} \tag{8}$$

Misalkan x adalah suatu nilai yang berada pada selang $x_{n-4} < x < x_n$, maka terdapat suatu $r \in R^+$ sedemikian hingga $x = x_n + rh$, akibatnya $x - x_n = rh$, $x - x_{n-1} = (r+1)h$, $x - x_{n-2} = (r+2)h$, dan $x - x_{n-3} = (r+3)h$. Sehingga persamaan (8) dapat dituliskan dalam parameter r sebagai :

$$\begin{aligned} p_4(x) = {} & f_n + r\nabla f_n + \frac{r(r+1)}{2}\nabla^2 f_n + \frac{r(r+1)(r+2)}{6}\nabla^3 f_n \\ & + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}\nabla^4 f_n \end{aligned} \tag{9}$$

Sehingga persamaan (1) dapat ditulis kembali sebagai :

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Bigg(& f_n + r\nabla f_n + \frac{r(r+1)}{2}\nabla^2 f_n + \frac{r(r+1)(r+2)}{6}\nabla^3 f_n \\ & + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}\nabla^4 f_n \Bigg) dx \end{aligned} \tag{10}$$

dimana untuk $x = x_n$, maka $r = \frac{(x_n - x_n)}{h} = 0$,

untuk $x = x_{n+1}$, maka $r = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{h} = \frac{h}{h} = 1$

dan untuk $r = \frac{(x - x_n)}{h}$ maka $dr = \frac{1}{h}dx$

sehingga persamaan (10) dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + h\Bigg(& f_n\int_0^1 dr + \nabla f_n\int_0^1 r\,dr + \nabla^2 f_n\int_0^1 \frac{r(r+1)}{2}dr + \nabla^3 f_n\int_0^1 \frac{r(r+1)(r+2)}{6}dr \\ & + \nabla^4 f_n\int_0^1 \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}dr \Bigg) \end{aligned} \tag{11}$$

Dengan melakukan pengintegralan biasa diperoleh

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n + \frac{251}{720}\nabla^4 f_n \right) \tag{12}$$

karena

$$\nabla f_n \quad = f_n - f_{n-1} \tag{13}$$

$$\nabla^2 f_n = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \tag{14}$$

$$\nabla^3 f_n = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3} \tag{15}$$

$$\nabla^4 f_n = f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4} \tag{16}$$

Dengan mensubsitusi persamaan (13) sampai (16) ke persamaan (12) diperoleh persamaan prediktor :

$$y*_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}\left(1901f_n - 2774f_{n-1} + 6618f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}\right). \tag{17}$$

Persamaan korektor dibentuk dengan cara yang sama pada persamaan prediktor. Disini, simpul-simpul yang diperlukan untuk pembentukan polinom $\tilde{p}_4(x)$ interpolasi ialah $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}$ yang berjarak sama yang dalam hal ini :

$$x_n \quad = x_{n+1} - h$$

$$x_{n-1} = x_n - h = (x_{n+1} - h) - h = x_{n+1} - 2h$$

$$x_{n-2} = x_{n-1} - h = (x_{n+1} - 2h) - h = x_{n+1} - 3h$$

$$x_{n-3} = x_{n-2} - h = (x_{n+1} - 3h) - h = x_{n+1} - 4h\,.$$

Dari tabel beda terbagi Newton yang dibentuk dari ke lima simpul tersebut diperoleh nilai-nilai koefisien :

$$a_1[x_n, x_{n+1}] = \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{\nabla f_{n+1}}{h} \tag{18}$$

$$a_2[x_{n-1}, x_{n+1}] = \frac{a_1[x_n, x_{n+1}] - a_1[x_{n-1}, x_n]}{x_{n+1} - x_{n-1}} = \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} \tag{19}$$

$$a_3[x_{n-2}, x_{n+1}] = \frac{a_2[x_{n-1}, x_{n+1}] - a_2[x_{n-2}, x_n]}{x_{n+1} - x_{n-2}} = \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6h^3} \tag{20}$$

$$a_4[x_{n-3}, x_{n+1}] = \frac{a_3[x_{n-2}, x_{n+1}] - a_3[x_{n-3}, x_n]}{x_{n-3}, x_{n+1}} = \frac{\nabla^4 f_{n+1}}{24h^4} \tag{21}$$

Interpolasi polinom derajat empat $\tilde{P}_4(x)$ dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_4(x) = {} & f_{n+1} + (x - x_{n+1})a_1[x_n, x_{n+1}] + a_2[x_{n-1}, x_{n+1}](x - x_{n+1})(x - x_n) \\ & + (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})a_3[x_{n-2}, x_{n+1}] \\ & + (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})a_4[x_{n-3}, x_{n+1}]\end{aligned} \tag{22}$$

Dengan mensubsitusi persamaan (18) sampai persamaan (21) ke persamaan (22) diperoleh :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_4(x) = {} & f_{n+1} + \frac{\nabla f_{n+1}}{h}(x - x_{n+1}) + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2}(x - x_{n+1})(x - x_n) \\ & + (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})\frac{\nabla^3 f_{n+1}}{3!h^3} \\ & + (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-3})\frac{\nabla^4 f_{n+1}}{4!h^4}\end{aligned} \tag{23}$$

Misalkan x adalah suatu nilai yang berada pada selang $x_{n-3} < x < x_{n+1}$, maka terdapat suatu $r \in R^{+}$ sedemikian hingga $x = x_{n+1} + rh$, akibatnya $x - x_{n+1} = rh$, $x - x_{n} = (r+1)h$, $x - x_{n-1} = (r+2)h$, $x - x_{n-2} = (r+3)h$. Sehingga persamaan (23) dapat dituliskan dalam parameter r sebagai :

$$\tilde{p}_4(x) = f_{n+1} + r\nabla f_{n+1} + \frac{r(r+1)}{2}\nabla^2 f_{n+1} + \frac{r(r+1)(r+2)}{6}\nabla^3 f_{n+1} + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}\nabla^4 f_{n+1} \tag{24}$$

Sehingga persamaan korektor dapat ditulis sebagai :

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f_{n+1} + r\nabla f_{n+1} + \frac{r(r+1)}{2}\nabla^2 f_{n+1} + \frac{r(r+1)(r+2)}{6}\nabla^3 f_{n+1} + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}\nabla^4 f_{n+1} \right) dx \tag{25}$$

dimana,

untuk $x = x_n$ maka $r = \frac{(x_n - x_{n+1})}{h} = -1$,

untuk $x = x_{n+1}$ maka $r = \frac{(x_{n+1} - x_{n+1})}{h} = 0$

dan $r = \frac{(x - x_{n+1})}{h} \Rightarrow dr = \frac{1}{h}dx$. Maka persamaan (25) dapat ditulis sebagai :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f_{n+1}\int_{-1}^{0} dr + \nabla f_{n+1}\int_{0}^{1} r\,dr + \nabla^2 f_{n+1}\int_{0}^{1} \frac{r(r+1)}{2}dr + \nabla^3 f_{n+1}\int_{0}^{1} \frac{r(r+1)(r+2)}{6}dr + \nabla^4 f_{n+1}\int_{0}^{1} \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}dr \right) \tag{26}$$

Dengan melakukan pengintegralan diperoleh persamaan :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{n+1} - \frac{19}{720}\nabla^4 f_{n+1} \right) \tag{27}$$

karena,

$$\nabla f_{n+1} = f_{n+1} - f_n \tag{28}$$

$$\nabla^2 f_{n+1} = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1} \tag{29}$$

$$\nabla^3 f_{n+1} = f_{n+1} - 3f_n + 3f_{n-1} - f_{n-2} \tag{30}$$

$$\nabla^4 f_{n+1} = f_{n+1} - 4f_n + 6f_{n-1} - 4f_{n-2} + f_{n-3} \tag{31}$$

Dengan mensubsitusi persamaan (28) sampai (31) disubtitusi ke persamaan (27) diperoleh persamaan korektor

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}\left(251 f^*_{n+1} + 646 f_n - 264 f_{n-1} + 106 f_{n-2} - 19 f_{n-3}\right) \tag{32}$$

Jadi, metode *Adams-Bashforth-Moulton* orde lima dapat ditulis sebagai berikut:

$$y*_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}\left(1901 f_n - 2774 f_{n-1} + 2616 f_{n-2} - 1274 f_{n-3} + 251 f_{n-4}\right) \qquad (33)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}\left(251 f^*_{n+1} + 646 f_n - 264 f_{n-1} + 106 f_{n-2} - 19 f_{n-3}\right) \qquad (34)$$

3. Aplikasi Pada Persamaan Diferensial

Pada bagian ini, metode yang baru saja didapat akan dibandingkan keakuratannya dengan metode yang berorde rendah, dalam hal ini Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Dan untuk mendapatkan beberapa nilai awal lain, kita menggunakan metode Runge-Kutta orde lima (lihat [6]) yang memiliki persamaan :

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + \tfrac{1}{3}h, y_n + \tfrac{1}{3}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_n + \tfrac{1}{3}h, y_n + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{6}k_2)$$
$$k_4 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{8}k_1 + \tfrac{3}{8}k_2)$$
$$k_5 = hf(x_n + \tfrac{2}{3}h, y_n + \tfrac{2}{27}k_1 + \tfrac{1}{9}k_2 + \tfrac{1}{3}k_3 + \tfrac{4}{27}k_4)$$
$$k_6 = hf(x_n + h, y_n - \tfrac{1}{22}k_1 + \tfrac{3}{22}k_2 + \tfrac{27}{11}k_3 - 4k_4 + \tfrac{27}{11}k_5)$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{120}\left(11k_1 + 81k_3 - 64k_4 + 81k_5 + 11k_6\right)$$

Disini akan ditinjau persamaan diferensial dengan syarat awal :

$$y' = y - x + 2, \qquad y(0) = 0$$

yang mempunyai solusi eksak $y(x) = e^x + x - 1$.

Hasil perhitungan dengan memilih $h = 0{,}1$ dan diperoleh hasil seperti yang tersaji pada tabel berikut :

x	$e^{x_n} + x_n - 1$	P-C orde 4		P-C orde 5		Runge-Kutta orde 5	
		y_n	Error	y_n	Error	y_n	Error
0,5	1.1487212707	1.1487216822	4.12E-07	1.1487212735	2.84E-09	1.1487212602	1.05E-08
0,6	1.4221188004	1.4221194868	6.86E-07	1.4221188164	1.60E-08	1.4221187865	1.39E-08
0,7	1.7137527075	1.7137537221	1.01E-06	1.7137527390	3.16E-08	1.7137526895	1.80E-08
0,8	2.0255409285	2.0255423329	1.40E-06	2.0255409789	5.04E-08	2.0255409058	2.27E-08
0,9	2.3596031112	2.3596049762	1.86E-06	2.3596031839	7.28E-08	2.3596030829	2.83E-08
1,0	2.7182818285	2.7182842353	2.41E-06	2.7182819278	9.93E-08	2.7182817938	3.47E-08

Dari tabel diatas, terlihat bahwa metode Adams-Bashforth-Moulton ordo lima lebih akurat dari ordo empat, akan tetapi kurang akurat dibandingkan dengan metode Runge-Kutta ordo lima. Metode Adam-Bashforth-Moulton ordo lima memberikan alternatif metode dalam mendapatkan solusi dengan tingkat ketelitian yang lebih tinggi dengan jumlah komputasi yang lebih sedikit dibanding dengan metode Runge-Kutta ordo lima.

Daftar Pustaka

[1] Samuel D. Conte dan Carl de Boor, 2001, ”*Dasar-Dasar Analisa Numerik”*, Wayne Anderson, Makassar.

[2] Erwin Kreyszig, 1993, *“Advanced Engineering Mathematics*”, Wayne Anderson, Singapore.

[3] Jeffry Kusuma dan Muhtar, 2006, ”*Metode Runge – Kutta Orde Lima untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa”*, Jurusan Matematika FMIPA Unhas, Makassar.

[4] Daniel D.McCracken dan William S. Dorn,. 1986 ”*Studi Kasus Metode Numerik dengan Fortran IV*”, *terj.* Farida Muchtadi. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[5] Rinaldi Munir, 2003, ”*Metode Numerik”*, Penerbit Informatika, Bandung.

[6] Edwin J. Purcell dan Dale Varberg, 1987, ”*Kalkulus dan Geometri Analitis*”, Penerbit Erlangga, Jakarta.